Тема 11 Продольный изгиб прямых стержней

Понятие об устойчивости

Соблюдение условий прочности и жесткости еще не гарантирует способности конструкции выполнять предназначенные ей функции. Так система при некотором значении нагрузки может потерять устойчивость своего начального состояния.

Под устойчивостью понимается свойство системы сохранять свое состояние при внешних воздействиях. Если система таким свойством не обладает, она называется неустойчивой. В равной мере можно сказать, что неустойчивым является и ее состояние.

При потере устойчивости реализуется переход к некоторому новому положению равновесия, что в подавляющем большинстве случаев сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или полным разрушением.

Наиболее простым случаем является потеря стержня устойчивости центрально сжатого стержня (рис. 11.1). При достаточно большой силе стержень не может сохранять прямолинейную форму (рис. 11.1, а) и неминуемо изогнется. Произойдет потеря устойчивости (рис. 11.1, б или рис. 11.1, в).

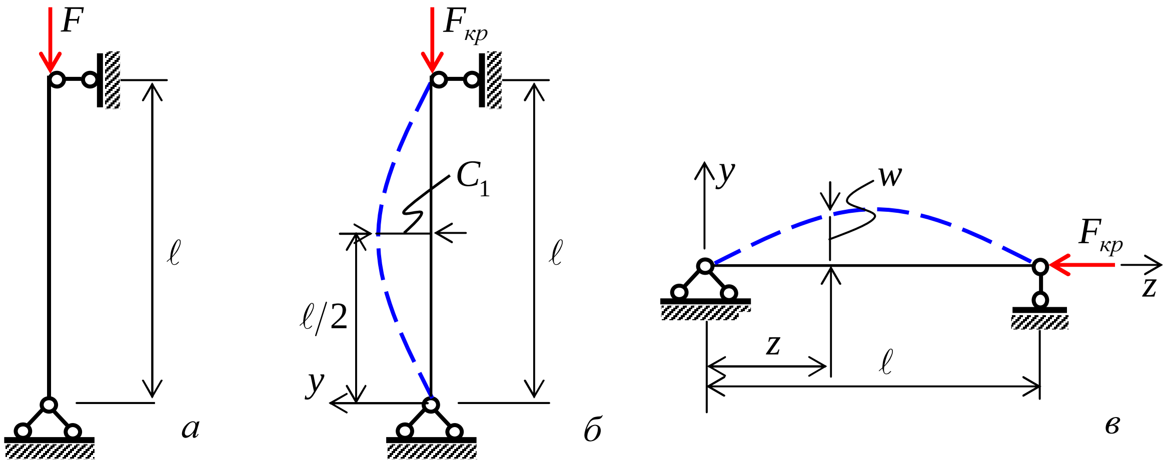


Рис.11.1

Значение силы, нагрузки, напряжения, при котором первоначальная форма равновесия упругого тела становится неустойчивой, называется соответственно критической силой, критической нагрузкой и критическим напряжением.

Продольный изгиб

Потерю устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально сжатого прямого стержня часто называют *продольным изгибом*, так как она влечет за собой значительное искривление стержня под действием продольной силы.

Термин «проверка на продольный изгиб» является условным, так как здесь речь идет не о проверке на изгиб, а о проверке на устойчивость прямолинейной формы стержня.

Это наиболее простая и в то же время одна из наиболее важных инженерных задач, связанных с проблемой устойчивости.

Формула Эйлера

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения с шарнирно закрепленными концами, нагруженный на верхнем конце центрально приложенной сжимающей силой F (рис. 11.1, а).

Наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силой F, при котором прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется *критической силой* ($F_{кр}$).

Для ее определения отклоним стержень в положение, показанное пунктиром, и установим, при каком наименьшем значении силы $F = F_{кр}$ стержень может не вернуться в прежнее положение (рис.11.1, б или рис. 11.1, в). Т.е. рассмотрим условия, при которых возможно равновесие стержня с изогнутой осью.

Заметим, что сама постановка задачи иная, чем во всех ранее рассмотренных отделах курса. Если раньше мы определяли деформацию стержня при заданных внешних нагрузках, то здесь ставится обратная задача: задавшись искривлением оси сжатого стержня, следует определить, при каком значении осевой сжимающей силы F такое искривление возможно.

Координаты точек упругой линии стержня обозначим через z и w (рис. 11.1, в). Начало координат считаем расположенным у нижнего конца стержня, а ось z направленной вверх (рис. 11.1, б).

При малых прогибах, приближенное дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид

$$EI \cdot \frac{d^2 w}{dz^2} = M .$$

Изгиб стержня происходит в плоскости минимальной жесткости, и поэтому под величиной I понимается минимальный момент инерции сечения.

Изгибающий момент в сечении с абсциссой z равен

$$M = -F_{кр} \cdot w$$

Подставим выражение M в уравнение упругой линии

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{F_{кр} \cdot w}{EI_{\min}} = 0 \text{ или } \frac{d^2 w}{dz^2} + k^2 \cdot w = 0, \text{ где } k^2 = \frac{F_{кр}}{EI_{\min}} .$$

Интеграл полученного дифференциального уравнения имеет вид

$$w = C_1 \cdot \sin kz + C_2 \cdot \cos kz .$$

Это решение заключает в себе три неизвестных: постоянные интегрирования C_1 и C_2 и значение k, так как величина критической силы пока нам неизвестна.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 подбираются так, чтобы были удовлетворены граничные условия: при $z=0$ $w=0$ и при $z=\ell$ и $w=0$. Из первого условия вытекает, что $C_2=0$.

Таким образом, изогнутая ось стержня является синусоидой с уравнением $w=C_1 \cdot \sin kz$.

Второе условие дает

$$C_1 \cdot \sin k\ell = 0.$$

Это уравнение имеет два возможных решения: либо $C_1=0$, либо же $\sin k\ell = 0$.

Если $C_1=0$, то перемещения w обращаются тождественно в нуль, и стержень, следовательно, имеет прямолинейную форму. Это противоречит исходным предпосылкам нашего вывода. Следовательно, $\sin k\ell = 0$, и величина $k\ell$ может иметь следующий бесконечный ряд значений:

$$k\ell = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \dots,\ \pi \cdot n,$$

где n – произвольное целое число.

Таким образом, имеем $k\ell = \pi \cdot n$ или $k = \pi \cdot n/\ell$. С учетом $k^2 = F_{кр}/EI_{\min}$ получаем

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{\ell^2} \cdot n^2.$$

Иначе говоря, нагрузка, способная удержать слегка искривленный стержень в равновесии, теоретически может иметь целый ряд значений. Наименьшее значение осевой сжимающей силы, при которой становится возможным продольный изгиб, будет при $n=1$. Тогда

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{\ell^2}.$$

Эта формула впервые была получена академиком Петербургской Академии наук Л. Эйлером в 1744 году, поэтому первую критическую силу $F_{кр}$ называют также эйлеровой критической силой для сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами.

Анализ формулы Эйлера

Значению этой критической силы соответствует изгиб стержня по синусоиде

$$w = C_1 \cdot \sin \pi \cdot z/\ell.$$

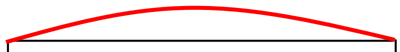
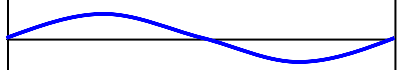
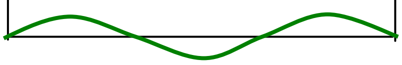
Здесь мы видим, что константа C_1 в выражении для упругой линии осталась неопределенной. Перемещения найдены, как говорят, с точностью до постоянного множителя. Физическое значение ее выяснится, если в уравнение синусоиды положить $z=\ell/2$, тогда $w=C_1$. Значит, C_1 – это прогиб стержня в сечении посредине его длины (рис. 11.1, б).

Так как при критическом значении силы F равновесие изогнутого стержня возможно при различных отклонениях его от прямолинейной формы, лишь бы эти отклонения были малыми, то естественно что, прогиб $w = C_1$ остается неопределенным.

Значениям критической силы высших порядков $F_{кр} = \pi^2 n^2 \cdot EI_{\min} / \ell^2$ соответствуют искривления по синусоидам с двумя, тремя и т.д. полуволнами – $w = C_1 \cdot \sin \pi \cdot n \cdot z/\ell$ (табл. 11.1).

Таким образом, чем больше точек перегиба будет иметь синусоидально-искривленная ось стержня, тем больше должна быть критическая сила.

Табл. 11.1

n	$F_{кр}$	w	форма равновесия
1	$\pi^2 EI_{\min} / \ell^2$	$C_1 \cdot \sin \pi \cdot z/\ell$	
2	$4\pi^2 EI_{\min} / \ell^2$	$C_1 \cdot \sin 2\pi \cdot z/\ell$	
3	$9\pi^2 EI_{\min} / \ell^2$	$C_1 \cdot \sin 3\pi \cdot z/\ell$	

Считается, что формы равновесия при $n \geq 2$ неустойчивы и возможны лишь при наличии промежуточных опор в сечениях с нулевым прогибом.

Влияние способа закрепления концов стержня

Найденное значение критической силы справедливо лишь для стержня с шарнирно-опертыми концами и изменится при других условиях закрепления концов стержня.

Закрепление сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами мы будем называть *основным* случаем закрепления. Другие виды закрепления будем приводить к основному случаю.

Если повторить весь ход вывода для стержня, имеющего другие условия закрепления концов стержня, то полученные другие значения критической силы можно объединить с формулой для критической силы основного случая и записать их в следующем виде:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2}.$$

Здесь μ – так называемый коэффициент приведения длины, $(\mu \cdot \ell)$ – приведенная длина стержня. Можно сказать, что μ – число, показывающее, во сколько следует увеличить длину шарнирно-опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе стержня длиной ℓ в рассматриваемых условиях закрепления.

Понятие о приведенной длине было впервые введено профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. Ясинским.

На рис 11.2 показаны четыре наиболее часто встречающиеся случая закре-пления стержня и указаны соответствующие значения коэффициента приведе-ния длины. В двух последних случаях значение μ легко определяется путем простого сопоставления упругой линии изогнутого стержня с длиной полу-волны синусоиды при шарнирном закреплении.

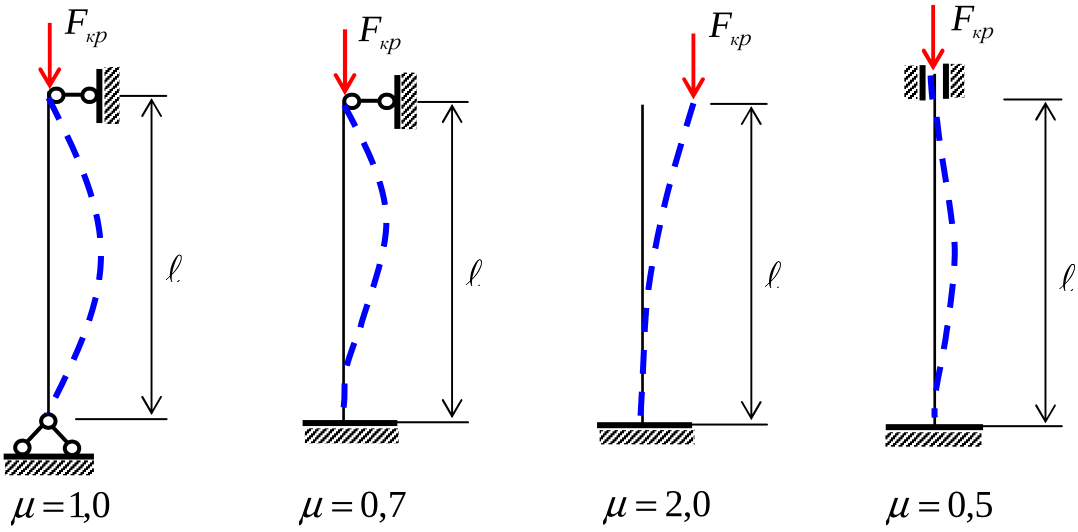


Рис. 11.2

На практике, однако, почти никогда не встречаются в чистом виде те закрепления концов стержня, которые мы имеем на наших расчетных схемах.

Так в конструкциях очень часто встречаются сжатые стержни, концы которых приклепаны или приварены к другим элементам. Такое закрепление, однако, трудно считать защемлением, так как части конструкции, к которым прикреплены эти стержни, не являются абсолютно жесткими. Достаточно возможности уже небольшого поворота опорного сечения в защемлении, чтобы оно оказалось в условиях, очень близких к шарнирному опиранию. Поэтому на практике недопустимо рассчитывать такие стержни, как стойки с абсолютно защемленными концами.

Коэффициент запаса устойчивости

Допускаемой нагрузкой называется нагрузка, определяемая по формуле

$$F_{доп} = [F] = \frac{F_{кр}}{n_y},$$

где n_y – коэффициент запаса устойчивости, который принимается таким, чтобы была обеспечена надежная работа стержня.

Условие устойчивости

Критическая сила $F_{кр}$ вызывает в сжатом стержне критические напряжения $\sigma_{\text{кр}}$, которые являются опасными для него. Поэтому, чтобы обеспечить устойчивость прямолинейной формы стержня, сжатого силой F, необходимо к условию прочности

$$\sigma \le [\sigma] \text{ или } \frac{F}{A} \le [\sigma]$$

добавить еще условие устойчивости:

$$\sigma \le [\sigma_y] \text{ или } \frac{F}{A} \le [\sigma_y], \text{ где } [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}, \text{ где } \sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \text{ (или } F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A).$$

Для возможности осуществить проверку на устойчивость мы должны показать, как определять $\sigma_{кр}$ и как выбрать коэффициент запаса n_y.

Заметим, что при составлении условия устойчивости, вводится в расчет площадь брутто, т.е. без учета его ослаблений ($A = A_{бр}$).

Это объясняется тем, что ослабление сечения стержня заклепками или болтами в металлических конструкциях, врубками в деревянных происходит не по всей его длине, а лишь на отдельных небольших участках. Сопротивление же стержня выпучиванию зависит от жесткости стержня на всем его протяжении. Поэтому местные ослабления практически не влияют на величину критической силы.

Критические напряжения

Критические напряжения можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2 \cdot A},$$

где с учетом $i_{\min}^2 = \dfrac{I_{\min}}{A}$ и $\lambda = \dfrac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}}$ получаем

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}.$$

Здесь $i_{\min}$ – наименьший радиус инерции сечения, λ – гибкость сжатого стержня.

Безразмерная величина λ играет весьма важную роль во всех проверках сжатых стержней на устойчивость. Она учитывает одновременно четыре характеристики сжатого стержня:

1) длину стержня; 2) величину площади сечения: 3) способ закрепления его концов, 4) форму сечения, зависящую от $i_{\min}$.

Вид графической зависимости $\sigma_{кр}$ от λ показан на рис. 11.3. Эта зависимость представляется гиперболической кривой, так называемой «гиперболой Эйлера».

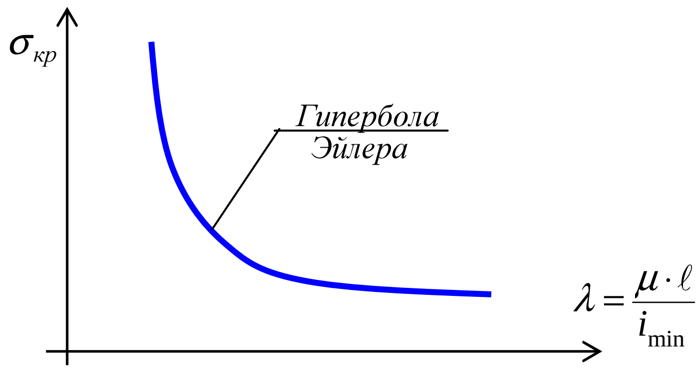


Рис. 11.3

Пределы применимости формулы Эйлера

Казалось бы, что полученные результаты решают задачу проверки сжатого стержня на устойчивость, остается выбрать лишь коэффициент запаса n_y. Однако это далеко не так. Ближайшее же изучение числовых величин, получаемых по формуле Эйлера, показывает, что она дает правильные результаты лишь в известных пределах.

Дело в том, что зависимость $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ была получена в предположении, что напряжения $\sigma_{\text{кр}}$, вызванные в стержне критической силой, не превосходят предела пропорциональности $\sigma_{пц}$. Это следует из того, что в основу вывода формул положено приближенное дифференциальное уравнение упругой линии, которым можно пользоваться лишь в пределах применимости закона Гука. Таким образом, имеем

$\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}$ или $\dfrac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц}$, отсюда $\lambda \ge \sqrt{\dfrac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}$.

Правая часть полученного выражения представляет собой то наименьшее значение гибкости, при котором формула Эйлера еще применима, – это так называемая *предельная гибкость* $\lambda_{пред}$:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}.$$

Предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня – его модуля упругости и предела пропорциональности.

Итак, *формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня применима при условии, что его гибкость больше предельной*:

$$\lambda \ge \lambda_{пред}.$$

Для стали 3 имеем $\lambda_{пред} = \sqrt{\dfrac{\pi^2 \cdot 200\,(ГПа)}{200\,(МПа)}} \approx 100$, для сосны – $\lambda_{пред} \approx 110$, для чугуна – $\lambda_{пред} \approx 80$.

Формула Ясинского

Теоретическое решение, полученное Эйлером, оказалось применимым на практике лишь для очень ограниченной категории стержней, а именно, тонких и длинных, с большой гибкостью. Между тем, в конструкциях очень часто встречаются стержни с малой гибкостью.

Таким образом, надо найти способ вычисления критических напряжений и для тех случаев, когда они превышают предел пропорциональности материалов, например, для стержней из мягкой стали при гибкостях от 0 до 100.

Надо помнить, что в сопротивлении материалов важнейшим источником получения новых знаний являются результаты эксперимента. Опыты показывают, что прежде всего надо выделить стержни с малой гибкостью, от 0 примерно до 40. Для таких стержней трудно говорить о явлении потери устойчивости прямолинейной формы равновесия, скорее всего они будут выходить из строя главным образом за счет того, что напряжения сжатия в них будут достигать предела текучести $\sigma_т$ (при пластичном материале) или предела прочности $\sigma_в$ (при хрупких материалах).

Таким образом, мы имеем два предельных случая работы сжатых стержней: короткие стержни, которые теряют грузоподъемность в основном за счет разрушения материала от сжатия, и длинные, для которых потеря грузоподъемности вызывается нарушением устойчивости прямолинейной формы стержня. Количественное изменение соотношения длины и поперечных размеров стержня меняет и весь характер явления разрушения. Общим остается лишь внезапность наступления критического состояния в смысле внезапного резкого возрастания деформаций.

Нам остается теперь рассмотреть поведение сжатых стержней при средних величинах гибкости, например для стальных стержней при гибкостях от 40 до 100. С подобными значениями гибкостей инженер чаще всего встречается на практике. Как показывают опыты, критические напряжения для них получаются выше предела пропорциональности и ниже предела текучести для пластичных и предела прочности для хрупких материалов.

На основании обширного опытного материала, собранного как у нас (проф. Ясинский), так и заграницей, было установлено, что критические напряжения при таких гибкостях меняются по закону близкому к линейному:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda ,$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала, λ – гибкость стержня. Для стали 3 при гибкостях от 40 до 100 $a = 310\,МПа$, $b = 1.14\,МПа$. Для дерева (сосна): $a = 29.3\,МПа$, $b = 0.194\,МПа$.

Критическую силу можно получить умножая $\sigma_{кр}$ на площадь брутто ($A = A_{бр}$): $F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$.

Полный график критических напряжений

Комбинируя формулу Эйлера с результатами экспериментов можно построить полный график критических напряжений (в зависимости от гибкости) для любого материала. На рис. 11.4 приведен такой график для стали 3.

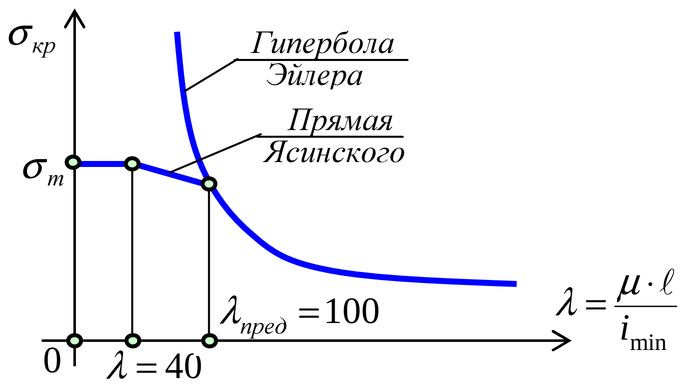


Рис. 11.4

График состоит из трех частей: гиперболы Эйлера при $\lambda \geq 100$, наклонной прямой (прямая Ясинского) при $100 < \lambda < 40$ и горизонтальной прямой, соответствующей $\sigma_{кр} = \sigma_{т}$, при $\lambda \leq 40$.

Таким образом, можно считать, что задача определения критических напряжений для стержней любой гибкости решена с достаточной для практических целей точностью.

Коэффициент запаса на устойчивость

Ранее было отмечено, что $[\sigma_y] = \sigma_{кр} / n_y$. Таким образом, для установления допускаемого напряжения на устойчивость $[\sigma_y]$ нам остается теперь выбрать только коэффициент запаса n_y.

На практике n_y колеблется для стали в пределах от 1.8 до 3.0 и выбирается выше коэффициента запаса на прочность n, равного 1.5 – 1.6. Это объясняется наличием рядом обстоятельств, неизбежных на практике (начальная кривизна, эксцентриситет действия нагрузки, неоднородность материала и т. д.) и почти не отражающихся на работе конструкции при других видах деформации (растяжение, кручение, изгиб).

Для сжатых же стержней, ввиду возможности потери устойчивости, эти обстоятельства сильно снизить грузоподъемность стержня. Для чугуна n_y колеблется от 5.0 до 5.5, для дерева – от 2.8 до 3.2.

Чтобы установить связь между допускаемыми напряжениями на устойчивость $[\sigma_y]$ и допускаемыми напряжениями на прочность $[\sigma]$, возьмем их отношение:

$\dfrac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \dfrac{\sigma_{кр}}{n_y} \cdot \dfrac{n}{\sigma_{пред}}$, или $[\sigma_y] = \dfrac{\sigma_{кр}}{\sigma_{пред}} \cdot \dfrac{n}{n_y} \cdot [\sigma]$, обозначая $\varphi = \dfrac{\sigma_{кр}}{\sigma_{пред}} \cdot \dfrac{n}{n_y}$, получим

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma].$$

Здесь, φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения для сжатых стержней (коэффициент продольного изгиба).

Зависимость $\varphi = f(\lambda)$ для каждого материала своя и устанавливается опытным путем. Обычно они для различных материалов представляются в виде таблиц, которые можно найти в любом учебнике по сопротивлению материалов или строительным конструкциям. Значения коэффициента φ для стали 3 приведены в табл. 11.2:

Табл. 11.2

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	1,00	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60
λ	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
φ	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	

Практический расчет сжатых стержней

Наличие полной диаграммы критических напряжений и введение понятия коэффициента φ позволяет произвести подбор сечения сжатого стержня.

Вначале записываем условие устойчивости:

$$\sigma \le [\sigma_y] \text{ или } \frac{F}{A} \le [\sigma_y], \text{ где } [\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma], \text{ тогда } \frac{F}{A} \le \varphi \cdot [\sigma].$$

Так как имеем одно уравнение, а неизвестных два – площадь поперечного сечения A и коэффициент φ, то одной из этих величин необходимо задаться, т.е. подбор приходится осуществлять путем последовательных приближений.

Поскольку $0 < \varphi < 1$, то удобно задаться $\varphi_1 = 0.5$ в первом приближении, тогда определяем $A_1 \ge \dfrac{F}{[\sigma] \cdot 0.5}$. Далее выбираем форму сечения, вычисляем его размеры, наименьший радиус инерции, гибкость.

Например, для прямоугольного сечения имеем $\alpha = b/h$, $A_1 = b \cdot h = \alpha \cdot h^2$, $I_{\min} = \dfrac{h \cdot b^3}{12} = \dfrac{\alpha^3 \cdot h^4}{12} = \dfrac{\alpha \cdot A_1^2}{12}$, $i_1^{\min} == \sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A_1}} = \sqrt{\dfrac{\alpha \cdot A_1}{12}}$, $\lambda_1 = \dfrac{\mu \cdot \ell}{i_1^{\min}} = \dfrac{\mu \cdot \ell \cdot \sqrt{12/\alpha}}{\sqrt{A_1}}$;

для квадратного сечения имеем – $A_1 = a^2$, $I_{\min} = \dfrac{b \cdot h^3}{12} = \dfrac{a \cdot a^3}{12} = \dfrac{a^4}{12} = \dfrac{A_1^2}{12}$, $i_1^{\min} == \sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A_1}} = \sqrt{\dfrac{A_1}{12}}$, $\lambda_1 = \dfrac{\mu \cdot \ell}{i_1^{\min}} = \dfrac{\mu \cdot \ell \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{A_1}}$; для круглого сечения – $A_1 = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}$, $I_{\min} = \dfrac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \dfrac{\pi}{\pi} = \dfrac{A_1^2}{4 \cdot \pi}$, $i_1^{\min} == \sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A_1}} = \sqrt{\dfrac{A_1}{4 \cdot \pi}}$, $\lambda_1 = \dfrac{\mu \cdot \ell}{i_1^{\min}} = \dfrac{\mu \cdot \ell \cdot \sqrt{4 \cdot \pi}}{\sqrt{A_1}}$.

Заметим, что гибкость здесь удобно выражать через площадь. Аналогичные выражения можно получить и для других типов сечений. Далее, по вычисленному значению гибкости, в зависимости от заданного материала, по таблице коэффициентов φ, используя линейную аппроксимацию, находим φ_{11}. Обычно φ_{11} отличается от $\varphi_1 = 0.5$. Это означает, что искомая гибкость заключена в интервале от 0.5 и до φ_{11}. Поэтому второе приближение начинаем с $\varphi_2 = (0.5 + \varphi_{11})/2$, вычисляем площадь A_2, гибкость λ_2 и соответствующую ей φ_{22}. Если φ_{22} близко к φ_2 (лучше, когда отличается на 0.05 – 0.01), то делается проверка условия устойчивости: $\dfrac{F}{A_2} \le [\sigma] \cdot \varphi_2$. Относительная разница между левой и правой частями неравенства должна быть меньше одного процента. Если это так, то за расчетные принимаем A_2, λ_2, φ_2. В противном случае делается третье приближение. Обычно хватает трех или четырех приближений.

Заметим, что окончательно выбранное сечение должно удовлетворять и условию прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_{нет}}, \quad \sigma_{\max} \le [\sigma] \quad \text{или} \quad \frac{F}{A_{нет}} \le [\sigma],$$

где $A_{нет}$ - площадь поперечного сечения в ослабленном месте стержня.